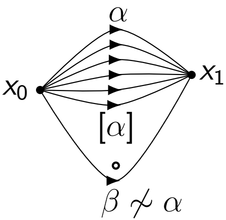
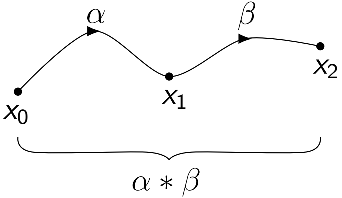
El grupo fundamental. Preliminares



Sea X es un espacio topológico y sean $x_0, x_1 \in X$.
Consideramos el conjunto de todos los caminos $\alpha : I = [0,1] \longrightarrow X$ de x_0 a x_1 (**a partir de ahora, I denotará el intervalo** $[0,1]$).
Consideramos la relación de homotopía (rel.$\{0,1\}$) entre esos caminos, que sabemos que es una relación de equivalencia.
Si α es un camino, denotaremos su **clase de equivalencia** por $[\alpha] = \{\gamma : I \longrightarrow X \mid \alpha \sim \gamma\,(\text{rel.}\{0,1\})\}$.

Sean ahora $x_0, x_1, x_2 \in X$. Sea $\alpha : I \longrightarrow X$ un camino en X de x_0 a x_1, y sea $\beta : I \longrightarrow X$ un camino en X de x_1 a x_2.
Sea $\alpha * \beta : I \longrightarrow X$ dada por

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ \beta(2s-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

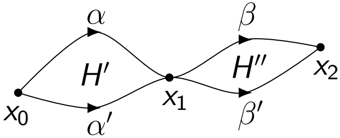


Se tiene que $\alpha * \beta$ está bien definida, es continua y $\alpha * \beta(0) = x_1$, $\alpha * \beta(1) = x_2$.
Por tanto, es un camino de x_0 a x_2 en X que llamamos **producto** de α y β.

El grupo fundamental. Preliminares

Lema. Si $\alpha \overset{H'}{\sim} \alpha'\,(\text{rel.}\{0,1\})$, y $\beta \overset{H''}{\sim} \beta'\,(\text{rel.}\{0,1\})$, entonces $\alpha * \beta \overset{H}{\sim} \alpha' * \beta'$ donde

$$H(s,t) = \begin{cases} H'(2s,t) & \text{si } 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ H''(2s-1,t) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$



Así, podemos definir $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$, **producto** de clases de equivalencia.

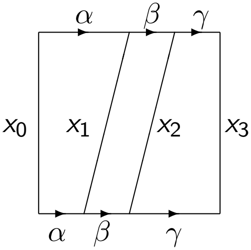
Propiedades. El producto de clases de equivalencia de caminos cumple las propiedades asociativa, existencia de neutro y existencia de opuesto.

Asociativa: Sean $\alpha, \beta, \gamma : I \longrightarrow X$ tales que $\alpha(1) = \beta(0)$ y $\beta(1) = \gamma(0)$, entonces $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$ $(\Leftrightarrow \alpha * (\beta * \gamma) \sim (\alpha * \beta) * \gamma\,(\text{rel.}\{0,1\}))$, donde

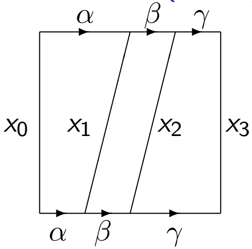
$$\alpha * (\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \alpha\,(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta\,(4s-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ \gamma\,(4s-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$(\alpha * \beta) * \gamma(s) = \begin{cases} \alpha\,(4s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \beta\,(4s-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma\,(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

son homótopas mediante la homotopía H de la figura



El grupo fundamental. Preliminares



Asociativa (cont.): Para obtener la expresión de H observamos que la recta entre α y β es $t = 4s - 1$ ($\Leftrightarrow s = \frac{t+1}{4}$) y la que separa β y γ es $t = 4s - 2$ ($\Leftrightarrow s = \frac{t+2}{4}$). Así, fijado t, $H(t,s)$ depende de α en $\left[0, \frac{t+1}{4}\right]$, de β en $\left[\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\right]$ y de γ en $\left[\frac{t+2}{4}, 1\right]$.

Fijado t para que $\alpha(s)$ recorra el camino completo α para $s \in \left[0, \frac{t+1}{4}\right]$ habría que hacer el cambio $s \to \frac{4s}{t+1}$, para que $\beta(s)$ recorra el camino completo β para $s \in \left[\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\right]$ habría que hacer el cambio $s \to 4s - (t+1)$, y para que $\gamma(s)$ recorra el camino completo γ para $s \in \left[\frac{t+2}{4}, 1\right]$ habría que hacer el cambio $s \to (\frac{4}{2-t})s - \frac{t+2}{2-t} = \frac{4s-t-2}{2-t}$.

Así quedaría

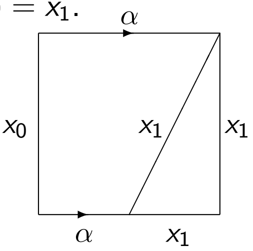
$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{4s}{1+t}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \dfrac{t+1}{4} \\ \beta\left(4s - t - 1\right) & \text{si } \dfrac{t+1}{4} \leq s \leq \dfrac{t+2}{4} \\ \gamma\left(\dfrac{4s-t-2}{2-t}\right) & \text{si } \dfrac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

En general, el producto de n caminos $[\alpha_1] * [\alpha_2] * \cdots * [\alpha_n]$ es independiente de como se agrupen, y se puede definir bien tomando $\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots \alpha_n(s) = \alpha_i(s)$ si $s \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ (dividiendo $[0,1]$ en intervalos iguales), bien tomando paréntesis como convenga.

El grupo fundamental. Preliminares

Existencia de neutro: Si $x \in X$, sea c_x el camino constante $c_x : I \longrightarrow X$ dado por $c_x(t) = x$ para todo $x \in I$. Sea $\alpha : I \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$.
Entonces $[\alpha] * [c_{x_1}] = [\alpha]$ mediante la homotopía

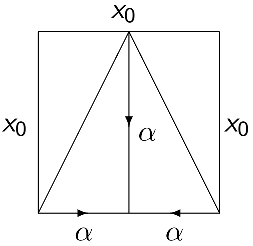
cuya expresión es $H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{2s}{1+t}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \dfrac{1+t}{2} \\ x_1 & \text{si } \dfrac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$



Análogamente $[c_{x_0}] * [\alpha] = [\alpha]$.

Existencia de inverso: Dado $\alpha : I \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$, sea $\bar{\alpha} : I \longrightarrow X$ dado por $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$.
Entonces $[\alpha] * [\bar{\alpha}] = [c_{x_0}]$ mediante la homotopía cuya expresión

es $H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(2s - t\right) & \text{si } \dfrac{t}{2} \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ \alpha\left(2 - 2s - t\right) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 - \dfrac{t}{2} \\ x_0 & \text{si } 0 \leq s \leq \dfrac{t}{2} \text{ ó } \dfrac{2-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$



Como $[\bar{\bar{\alpha}}] = [\alpha]$ también se cumple que $[\bar{\alpha}] * [\alpha] = [c_{x_1}]$.

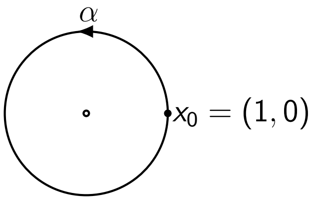
El grupo fundamental

Sea X un espacio topológico y X_0 un punto de X. Un camino en X que comienza y acaba en x_0 se llama **lazo basado en x_0**. El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociadas a los lazos basados en x_0, con la operación $*$ tiene estructura de grupo y se denomina **grupo fundamental de X** relativo al punto base x_0. Se denota por $\pi(X, x_0)$.

Ejemplos. a) Si $X = \{a\}$, $\pi(X, a) = \{[c_a]\}$ (grupo trivial).

b) Si $X = \mathbb{R}^n$, $\pi(\mathbb{R}^n, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$ pues todo lazo basado en x_0 es homótopo (rel.$\{0,1\}$) al camino constante c_{x_0}.

c) Si $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ y $x_0 = (1,0)$, entonces el lazo $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ dado por $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ intuitivamente no es homótopo (rel.$\{0,1\}$) al lazo constante c_{x_0}.



Se dice que X es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y $\pi(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$.

Ejemplo. $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

Observación. Si X es contractible, X es simplemente conexo.

El grupo fundamental de S^1

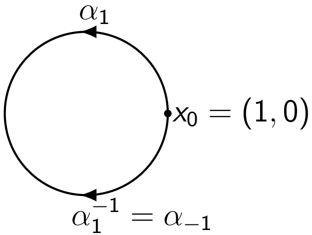
Teorema. Sea S^1 la circunferencia unidad y sea $x_0 = (1,0) \Rightarrow \pi(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$.

Demostración. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, consideramos el lazo $\alpha_n : I \longrightarrow S^1$ basado en x_0 dado por $\alpha_n(t) = (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt)$.

Entonces $\pi(S^1, x_0) = \{[\alpha_n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$, pues:

i) Si $m \neq n$ entonces $\alpha_n \not\sim \alpha_m$.

ii) Si α es un lazo basado en x_0 existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha \sim \alpha_n\,(\text{rel.}\{0,1\})$.
(ver las dos siguientes transparencias).

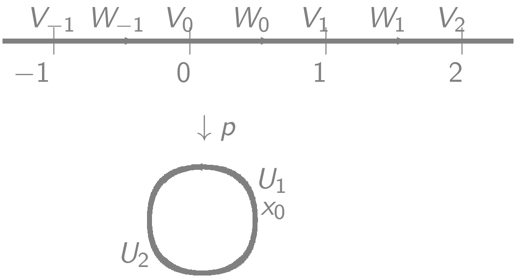


Además, la aplicación $\phi : \pi(S^1, (1,0)) \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\phi([\alpha_n]) = n$ es un isomorfismo de grupos, pues $[\alpha_m] * [\alpha_n] = [\alpha_m * \alpha_n] = [\alpha_{m+n}]$.

Por tanto $\pi(S^1, (1,0))$ es cíclico infinito y está generado por el lazo α_1.

El grupo fundamental de S^1

Demostración (cont.). Sea $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.



Sean $U_1 = \{(cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid -\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}\}$
$U_2 = \{(cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}\}$
abiertos de S^1 tales que:

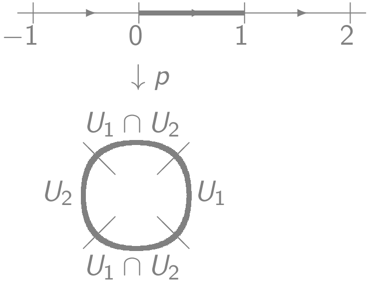
- $p^{-1}(U_1) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V^n$ (con $V_n = (n - \frac{3}{8}, n + \frac{3}{8})$) unión disjunta de abiertos de $\mathbb{R}$ tal que $V_n \overset{p|_{V_n}}{\simeq} U_1$ para todo $n\mathbb{Z}$.
- $p^{-1}(U_2) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} W_n$ (con $W_n = (n + \frac{1}{8}, n + \frac{7}{8})$) unión disjunta de abiertos de $\mathbb{R}$ tal que $W_n \overset{p|_{W_n}}{\simeq} U_2$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

p consiste en enrollar la recta real alrededor de S^1 de tal manera que los enteros se aplican todos en x_0.

Vamos a ver que estas propiedades de p implican que:
- Dado $\alpha : I \longrightarrow S^1$ un lazo en S^1 basado en x_0, existe un camino $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\tilde{\alpha}(0) = 0$ tal que $p\tilde{\alpha} = \alpha$ ($\tilde{\alpha}$ es una elevación de α).
- Si dos lazos en S^1 basado en x_0 son homótopos (rel.$\{0, 1\}$) sus elevaciones también son homótopas (rel.$\{0, 1\}$).

El grupo fundamental de S^1

Demostración (cont.). Dado α existen $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ tales que $\alpha([0,t_1]) \in U_1$, $\alpha([t_1,t_2]) \in U_2$, $\alpha([t_2,t_3]) \in U_1, \ldots$.



Consideramos $\alpha|_{[0,t_1]}$, como $p|_{V_1}$ es homeomorfismo, existe $\tilde\alpha : [0,t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde\alpha(0) = 0$ y $p\tilde\alpha = \alpha|_{[0,t_1]}$.
Como $\alpha(t_1) \in U_2$, existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde\alpha(t_1) \in W_i$ y como $p|_{W_i}$ es homeomorfismo, $\tilde\alpha$ se extiende a $\tilde\alpha : [0,t_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p\tilde\alpha = \alpha|_{[0,t_2]}$. Y así sucesivamente.
Así obtenemos $\tilde\alpha : I \longrightarrow$ tal que $\tilde\alpha(0) = 0$, $p\tilde\alpha = \alpha$, y $\tilde\alpha(1) \in \mathbb{Z}$. Se puede ver que $\tilde\alpha$ es único.
En particular, $\alpha_n(t) = (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt)$ se eleva a $\tilde\alpha_n(t) = nt$ (pues $p\tilde\alpha_n = \alpha_n$).
Por otra parte, si $\alpha \overset{H}{\sim} \beta$ (rel.$\{0,1\}$), se puede probar (elevando H) que $\tilde\alpha \sim \tilde\beta$ (rel.$\{0,1\}$) y por tanto $\tilde\alpha(1) = \tilde\beta(1)$.

Ya estamos en condiciones de probar **i)** y **ii)**.

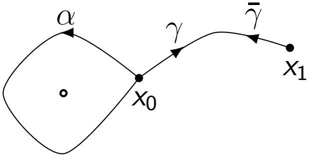
i) Si α es un lazo en S^1 basado en x_0, sea $\tilde\alpha$ su elevación y sea $n = \tilde\alpha(1)$. Como $\mathbb{R}$ es simplemente conexo $\tilde\alpha \sim \tilde\alpha_n$ (rel.$\{0,1\}$). Entonces $\alpha = \tilde\alpha \sim p\tilde\alpha_n = \alpha_n$ (rel.$\{0,1\}$).

ii) Si $\alpha_n \sim \alpha_m$ (rel.$\{0,1\}$) $\Rightarrow \tilde\alpha_m \sim \tilde\alpha_n$ (rel.$\{0,1\}$) $\Rightarrow m = n$.

Independencia del punto base

Teorema. Si X es conexo por caminos, y $x_0, x_1 \in X$, entonces $\pi(X, x_0) \simeq \pi(X, x_1)$.

Demostración. Sea γ un camino en X de x_0 a x_1.



Sea $\hat{\gamma} : \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(X, x_1)$ dada por

$$\hat{\gamma}([\alpha]) = [\bar{\gamma}] * [\alpha] * [\gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma].$$

Entonces $\hat{\gamma}$ está bien definida y es un isomorfismo de grupos.

- Es un homomorfismo porque si $\alpha, \beta \in \pi(X, x_0)$:
$$\begin{aligned}\hat{\gamma}([\alpha]) * \hat{\gamma}([\beta]) &= ([\bar{\gamma}] * ([\alpha] * [\gamma]) * ([\bar{\gamma}]) * [\beta]) * [\gamma]) \\ &= ([\bar{\gamma}] * [\alpha] * ([\gamma] * [\bar{\gamma}]) * [\beta]) * [\gamma] \\ &= [\bar{\alpha}] * [\gamma] * [c_{x_0}] * [\beta] * [\alpha] = [\bar{\gamma}] * ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = \hat{\gamma}([\alpha] * [\beta])\end{aligned}$$
- Es un isomorfismo, porque si $\eta = \bar{\gamma}$, entonces $\hat{\eta} : \pi(X, x_1) \longrightarrow \pi(X, x_0)$ es la inversa de $\hat{\gamma}$, pues, si $\alpha \in \pi(X, x_0)$:
$$\begin{aligned}\hat{\eta}(\hat{\gamma}([\alpha])) = \hat{\eta}([\bar{\gamma}] * [\alpha] * [\gamma]) &= [\bar{\eta}] * ([\bar{\gamma}] * ([\alpha] * [\gamma]) * [\eta] \\ &= ([\gamma] * [\bar{\gamma}]) * [\alpha] * ([\gamma]) * [\bar{\gamma}]) = [\alpha]\end{aligned}$$
  y, análogamente, $\hat{\gamma}(\hat{\eta}([\beta])) = [\beta]$, si $\beta \in \pi(X, x_1)$.

Observación. Si X es conexo por caminos podemos poner $\pi(X)$ sin especificar el punto.

Homomorfismo inducido

Si $f : X \longrightarrow Y$ cumple que $f(x_0) = y_0$ lo denotaremos por $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.
Dada $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ continua, sea $f_* : \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(Y, y_0)$, dada por

$$f_*([\alpha]) = [f\alpha].$$

Entonces:

- f_* está bien definida, ya que si $\alpha \sim \beta\,(\mathrm{rel.}\{0,1\})$, entonces $f\alpha \sim f\beta\,(\mathrm{rel.}\{0,1\})$
- f_* es un homomorfismo porque

$$f_*([\alpha * \beta]) = [f(\alpha * \beta)] = [(f\alpha) * (f\beta)] = [f\alpha] * [f\beta] = f_*([\alpha]) * f_*([\beta]).$$

A f_* se le denomina **homomorfismo inducido** por f.

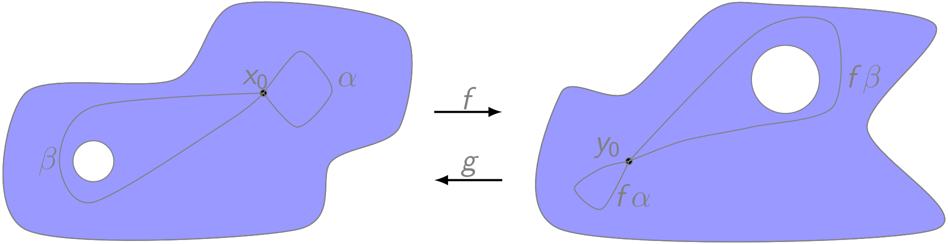
Propiedades. a) Dadas $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ continuas $\Rightarrow (gf)_* = g_* f_*$.
b) Si $\mathrm{Id}_X : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ es la identidad $\Rightarrow (\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{\pi(X, x_0)}$.
Demostración. a) Dado $[\alpha]$, $g_*(f_*([\alpha])) = g_*([f\alpha]) = [gf\alpha] = (gf)_*([\alpha])$.
b) Dado $[\alpha]$, $(\mathrm{Id}_X)_*([\alpha]) = [\mathrm{Id}_X\,\alpha] = [\alpha]$.

Grupo fundamental de espacios homeomorfos

Teorema. Si $X \simeq Y$ (homeomorfos), entonces $\pi(X) \simeq \pi(Y)$.

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo entre X e Y y sea $g : Y \longrightarrow X$ su inversa. Sea $x_0 \in X$ y sea $y_0 = f(x_0) \in Y$.
Entonces $f_* : \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(Y, y_0)$ es un isomorfismo con inversa $g_* : \pi(Y, y_0) \longrightarrow \pi(X, x_0)$, pues

$$g_* f_* = (gf)_* = (\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{\pi(X,x_0)}$$
$$f_* g_* = (fg)_* = (\mathrm{Id}_Y)_* = \mathrm{Id}_{\pi(Y,y_0)} .$$



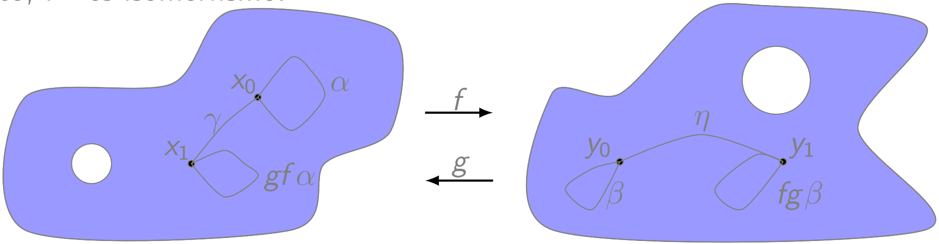
Observación. En este caso, no solo $g_* f_*([\alpha]) = [\alpha]$, sino que $gf(\alpha) = \alpha$ para todo camino α. Por otro lado, el teorema implica que f ha de mandar lazos homotópicamente nulos (como α) en lazos homotópicamente nulos.

Grupo fundamental de espacios homótopos

Teorema. Si $X \sim Y$ (homótopos), entonces $\pi(X) \simeq \pi(Y)$.

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ tales que $gf \sim \mathrm{Id}_X$ y $fg \sim \mathrm{Id}_Y$.
Sean $y_0 \in Y$, $x_0 = g(y_0) \in X$, $y_1 = f(x_1) \in Y$ y $x_1 = g(y_1) \in X$.
Entonces $\pi(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi(Y, y_1) \xrightarrow{g_*} \pi(X, x_1)$. Se tiene:
- $g_* f_* : \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(X, x_1)$ y se puede ver* que existe γ camino en X de x_0 a x_1 tal que $g_* f_* = \hat{\gamma} \Rightarrow f_*$ es sobreyectiva (por ser $\hat{\gamma}$ es biyectiva).
- $f_* g_* : \pi(Y, y_0) \longrightarrow \pi(Y, y_1)$ y se puede ver* que existe η camino en Y de y_0 a y_1 tal que $f_* g_* = \hat{\eta} \Rightarrow f_*$ es inyectiva (por ser $\hat{\gamma}$ es biyectiva).

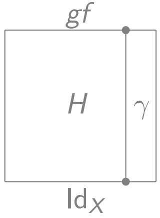
Por tanto, $f*$ es isomorfismo.



*Los caminos γ y η se obtienen a partir de las homotopías entre gf e Id_X, y entre fg e Id_Y, respectivamente (ver transparencia siguiente).

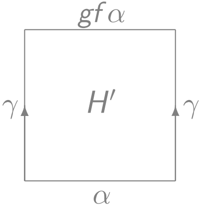
Grupo fundamental de espacios homótopos

Demostración (obtención de γ y η). Veamos primero como obtener γ camino en X de x_0 a x_1 tal que $g_* f_* = \hat{\gamma}$ (el caso de η es análogo).

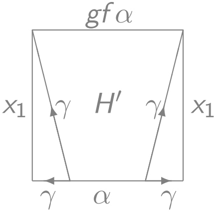


Consideramos $gf : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_1)$ tal que $gf \sim \mathrm{Id}_X$.
Sea H una homotopía de Id_X a gf.
Sea $\gamma : I \longrightarrow X$ dada por $\gamma(t) = H(x_0, t)$, camino de x_0 a x_1.

Vamos a ver que $\hat{\gamma} : \pi(X, x_0) \longrightarrow (X, x_1)$ cumple que $g_* f_* = \hat{\gamma}$.



Sea $\alpha : I \longrightarrow X$ un lazo en x_0.
Sea $H' : I \times I \longrightarrow I$ dada por $H'(s, t) = H(\alpha(s), t)$.
Entonces H' es una homotopía entre α y $gf\alpha$.



A partir de H' construimos $H'' : I \times I \longrightarrow I$ homotopía entre $\bar{\gamma}\alpha\gamma$ y $gf\alpha$ (ver figura).

Grupo fundamental de un producto de espacios.

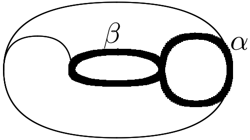
Teorema. Dados X e Y espacios topológicos, se tiene

$$\pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0).$$

Demostración. Sean $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ las proyecciones y sean $(p_1)_* : \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi(X, x_0)$, $(p_2)_* : \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi(Y, y_0)$.
Sea $\varphi =: \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$ dado por $\varphi([\alpha]) = ((p_1)_*([\alpha]), (p_2)_*([\alpha]))$. Entonces φ es un isomorfismo:

- Es sobreyectivo pues dado $([\eta], [\nu])$ se tiene $\eta \times \nu$ es un lazo en $X \times Y$ tal que $\varphi([\eta \times \nu]) = ([\eta], [\nu])$,
- Es inyectivo pues si α es un lazo en $X \times Y$ tal que $[\alpha] \in \ker \varphi$, esto implica que $p_1\alpha \overset{H}{\sim} c_{x_0}$ y $p_2\alpha \overset{H'}{\sim} c_{y_0}$ y entonces $\alpha \overset{H \times H'}{\sim} c_{(x_0,y_0)}$).

Corolario. Si $\mathbb{T}$ es un toro, $\pi(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Si α y β son los lazos de la figura, $\pi(\mathbb{T}) \simeq \{(\alpha^m, \beta^n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.
Si queremos ver los elementos de $\pi(\mathbb{T})$ como clases de lazos en $\mathbb{T}$, estas clases estarían representadas por lazos de la forma $\alpha^m * \beta^n$.



Nótese que esto implica, por ejemplo, que $\alpha * \beta * \alpha \sim \alpha * \alpha * \beta$ (rel.$\{0, 1\}$).

Ejercicios

Ejercicio 1. Sean X un espacio topológico y sea $r : X \longrightarrow A$ una retracción. Sea $a \in A$. Demuestra que $r_* : \pi(X, a) \longrightarrow \pi(A, a)$ es suprayectiva y que $(i_{A,X})_* : \pi(A, a) \longrightarrow \pi(X, a)$, donde $i_{A,X} : A \hookrightarrow X$ es la inclusión, es inyectiva.

Solución: Como r es una retracción, se tiene que $r \circ i_{A,X} = \mathrm{Id}_A : A \longrightarrow A$.
Esto implica que $r_* \circ (i_{A,X})_* = (r \circ i_{A,X})_* = (\mathrm{Id}_A)_* : \pi(A) \longrightarrow \pi(A)$.
Pero entonces r_* ha de ser suprayectiva e $i_{A,X})_*$ ha de ser inyectiva.

Ejercicio 2. Prueba que un retracto de un espacio simplemente conexo es simplemente conexo.

Solución: Tenemos que ver que A es conexo por caminos y que $\pi(A) = \{0\}$.
Como $A = r(X)$ y X es conexo por caminos, X es conexo por caminos.
Como X simplemente conexo, $\pi(X) = \{0\}$, y como r es retracción, $r_* : \pi(X) \longrightarrow \pi(A)$ es suprayectiva. Por tanto $\pi(A) = \{0\}$.

Ejercicio 3. Demuestra que no existe una retracción de B^2 en S^1.

Solución: Como B^2 es simplemente conexo, cualquier retracto suyo también ha de serlo, pero S^1 no lo es, pues $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$.

Ejercicios

Ejercicio 4. Prueba que no existe retracción de deformación de S^1 a uno de sus puntos.

Solución: Si existiera una retracción de deformación de S^1 a uno de sus puntos se tendría que $S^1 \sim \{p\}$. Contradicción pues $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$ y $\pi(\{p\}) = \{0\}$.

Ejercicio 5. Prueba que si $f : D^2 \longrightarrow D^2$ es un homeomorfismo, entonces $f(S^1) = S^1$.

Solución: Veamos que $f(S^1) \subset S^1$. Supongamos que existe $x \in S^1$ tal que $f(x) \notin S^1$.
Entonces $D_2 \setminus \{x\} \simeq D^2 \setminus \{f(x)\}$ y por tanto $\pi(D_2 \setminus \{x\}) \simeq \pi(D^2 \setminus \{f(x)\})$.
Pero $\pi(D_2 \setminus \{x\}) = \{0\}$ pues $D_2 \setminus \{x\} \sim \{(0,0)\}$, mientras que $\pi(D^2 \setminus \{f(x)\}) = \mathbb{Z}$ pues $D_2 \setminus \{x\} \sim S^1$.
Veamos ahora que $f(D_2 \setminus S^1) \subset D_2 \setminus S^1$. Supongamos que existe $x \notin S^1$ tal que $f(x) \in S^1$.
Entonces $D_2 \setminus \{x\} \simeq D^2 \setminus \{f(x)\}$ y por tanto $\pi(D_2 \setminus \{x\}) \simeq \pi(D^2 \setminus \{f(x)\})$.
Pero $\pi(D_2 \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}$ pues $D_2 \setminus \{x\} \sim S^1$, mientras que $\pi(D^2 \setminus \{f(x)\}) = \{0\}$ pues $D_2 \setminus \{x\} \sim \{(0,0)\}$.
Como f es biyectiva, los dos contenidos anteriores implican que $f(S^1) = S^1$ y $f(D_2 \setminus S^1) = D_2 \setminus S^1$.

Ejercicios

Ejercicio 6. Para cada uno de los siguientes espacios, $\pi(X)$ es $\{0\}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Determínalo para cada espacio.

a) El toro solido $B^2 \times S^1$
b) El toro T sin un punto
c) El cilindro $S^1 \times I$
d) El cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$
e) $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| > 1\}$
f) $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| \geq 1\}$.

Solución: a) $\pi(B^2 \times S^1) \simeq \mathbb{Z}$ pues se retracta con deformación a la circunferencia central.

b) $\pi(T \setminus \{a\}) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ pues se retracta con deformación a $S^1 \vee S^1$.

c) $\pi(S^1 \times I) \simeq \mathbb{Z}$ pues se retracta con deformación a S^1.

d) $\pi(S^1 \times \mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$ pues se retracta con deformación a S^1.

e) $\pi(\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| \geq 1\}) \simeq \mathbb{Z}$ pues se retracta con deformación a S^1 (la circunferencia de radio 1).

f) $\pi(\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| > 1\}) \simeq \mathbb{Z}$ pues se retracta con deformación a la circunferencia de radio 2.

Ejercicios

Ejercicio 6 (cont.). Para cada uno de los siguientes espacios, $\pi(X)$ es $\{0\}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$. Determínalo para cada espacio.

g) $\{\bar{x}\in\mathbb{R}^2 \mid ||x||<1\}$ h) $(\mathbb{R}_+\times\{0\})\cup S^1$ i) $(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\cup S^1$
j) $(\mathbb{R}\times\{0\})\cup S^1$ k) $\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}_+\times\{0\})\cup S^1$ l) $\mathbb{R}^3\setminus(OX_+\cup OY_+\cup OZ_+)$.

Solución: g) $\pi(\{\bar{x}\in\mathbb{R}^2 \mid ||x||<1\})\simeq\{0\}$ pues es contractible.

h) $\pi((\mathbb{R}_+\times\{0\})\cup S^1)\simeq\mathbb{Z}$ pues se retracta con deformación a S^1.

i) $\pi((\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\cup S^1)\simeq\mathbb{Z}$ pues se retracta con deformación al conjunto $\{(x,y)\in S^1 \mid x\leq 0\}\cup(\{0\}\times[-1,1])$.

j) $\pi((\mathbb{R}\times\{0\})\cup S^1)\simeq\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ pues se retracta con deformación al conjunto $S^1\cup([-1,1]\times\{0\})$.

k) $\pi(\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}_+\times\{0\})\cup S^1)\simeq\mathbb{Z}$ pues se retracta con deformación a S^1.

l) $\pi(\mathbb{R}^3\setminus(OX_+\cup OY_+\cup OZ_+))\simeq\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ pues se retracta con deformación a $S^2\setminus\{p,q,r\}\simeq D^2\setminus\{x,y\}\simeq\mathbb{R}^2\setminus\{x,y\}$.

Observación. $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ y $(0,0,0)\in OX_+, OY_+, OZ_+$.